

Théorème de Weierstrass par les polynômes de Bernstein: $\mathbb{Z} \mathbb{Q}$ p. 518

20-203-209
229-264-266

Toute fonction continue sur $[0,1]$ admet une suite, au plus, d'une suite de polynômes. (11.56)

Démonstration: Soit $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue, soit w son module de continuité uniforme ^①, i.e.: $w(h) = \sup_{|u-v| \leq h} \{ |f(u) - f(v)| \}$

Soit $B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$ le n ième polynôme de Bernstein de f .

Alors: 1) $\|B_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ sur $[0,1]$

2) $\|B_n - f\|_\infty \leq C w\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ pour un $C > 0$

3) $\exists f / \|B_n - f\|_\infty \geq C w\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ pour un $C > 0$.

Démonstration: 1) Soient $x \in [0,1]$, $X \sim B(n)$; $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon de X et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

Alors $S_n \sim B(n, x)$ ^② et $\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)$ ^③ $= B_n(x)$ donc $f(x) - B_n(x) = \mathbb{E}\left(f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)$

Soit $0 < \delta < 1$, alors $|f(x) - B_n(x)| \leq \mathbb{E}\left(|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)|\right)$

$$\leq \mathbb{E}\left(|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)| \mathbb{I}_{|x - \frac{S_n}{n}| < \delta}\right) + \mathbb{E}\left(|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)| \mathbb{I}_{|x - \frac{S_n}{n}| \geq \delta}\right)$$

$$\leq w(\delta) \mathbb{P}\left(|x - \frac{S_n}{n}| < \delta\right) + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}\left(|x - \frac{S_n}{n}| \geq \delta\right)$$

par inégalité de

Tchebychev ^④

$$\leq w(\delta) + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}\left(|nx - S_n| \geq n\delta\right)$$

$$\leq w(\delta) + 2\|f\|_\infty \frac{\text{Var}(S_n)}{n^2 \delta^2} \leq w(\delta) + 2\|f\|_\infty \frac{nx(1-x)}{n^2 \delta^2}$$

$$\stackrel{x(1-x) \leq \frac{1}{4}}{\text{sur } [0,1]} \leq w(\delta) + \|f\|_\infty \times \frac{1}{2n\delta^2}$$

$$\text{Donc } \|B_n - f\|_\infty \leq w(\delta) + \|f\|_\infty \times \frac{1}{2n\delta^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} w(\delta)$$

$$\text{donc } \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|B_n - f\|_\infty \leq w(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 \quad \text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \|B_n - f\|_\infty = 0$$

2) Par sous-additivité et croissance de w et par une récurrence ^⑤, on a:

$$\forall \lambda, h / \lambda, h \in \mathbb{B}, h \in \mathbb{B}, h \in \mathbb{B} : w(\lambda h) \leq (\lambda + 1) w(h)$$

donc pour $h = \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\lambda = \sqrt{n} |\lambda - \frac{s_n}{n}|$; on a :

$$w(|\lambda - \frac{s_n}{n}|) \leq (\sqrt{n} |\lambda - \frac{s_n}{n}| + 1) w(\frac{1}{\sqrt{n}})$$

$$\begin{aligned} \text{or } |f(h) - B_n(n)| &\leq \mathbb{E}(|f(h) - f(\frac{s_n}{n})|) \leq \mathbb{E}(w(|\lambda - \frac{s_n}{n}|)) \\ &\leq \mathbb{E}((\sqrt{n} |\lambda - \frac{s_n}{n}| + 1) w(\frac{1}{\sqrt{n}})) \\ &\leq w(\frac{1}{\sqrt{n}}) (1 + \sqrt{n} \|\lambda - \frac{s_n}{n}\|_2) \\ &\leq w(\frac{1}{\sqrt{n}}) (1 + \sqrt{n} \|\lambda - \frac{s_n}{n}\|_2) \quad \downarrow \text{par l'inégalité de Cauchy-Schwarz (4)} \\ &\leq w(\frac{1}{\sqrt{n}}) (1 + \sqrt{n} \sqrt{\text{Var}(\frac{s_n}{n})}) \quad (5) \\ &\leq w(\frac{1}{\sqrt{n}}) (1 + \sqrt{n} \sqrt{\frac{n \lambda (1-\lambda)}{n^2}}) \\ &\leq w(\frac{1}{\sqrt{n}}) (1 + \frac{1}{2}) = \frac{3}{2} w(\frac{1}{\sqrt{n}}) \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \|B_n - f\|_\infty \leq \frac{3}{2} w(\frac{1}{\sqrt{n}})$$

$$3) \text{ soit } f(h) = |\lambda - \frac{1}{2}| \text{ alors } w(h) \leq h \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \text{Mais } \|B_n - f\|_\infty &\geq |f(\frac{1}{2}) - B_n(\frac{1}{2})| = |B_n(\frac{1}{2})| = \mathbb{E}(f(\frac{s_n}{n})) \\ \text{où } s_n &= s_1 + \dots + s_n \text{ et } s_i \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2}) \text{ iid} \quad = \mathbb{E}(|\frac{s_n}{n} - \frac{1}{2}|) \end{aligned}$$

$$\|B_n - f\|_\infty \geq \frac{1}{2n} \mathbb{E}(|2s_n - n|) = \frac{1}{2n} \mathbb{E}(|\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n|) \text{ où } \varepsilon_i = 2s_i - 1$$

$$\text{et donc } \varepsilon_i \sim \text{Rademacher iid} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \|B_n - f\|_\infty &\geq \frac{1}{2n} \|\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n\|_2 \geq \frac{1}{2n\sqrt{2}} \|\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n\|_2 \quad \text{par l'inégalité de Khintchine (7)} \\ &\geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{n}}{n} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}} w(\frac{1}{\sqrt{n}}) \quad \text{par } (*) \end{aligned}$$

① ZQ p. 114 Un module de continuité est une application non nulle

$\varphi: \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$ telle que :

- $\varphi(0) = 0$
- φ est continue et croissante
- φ est sous-additive : $\forall t_1, t_2, \varphi(t_1 + t_2) \leq \varphi(t_1) + \varphi(t_2)$

② ZQ p. 102 Inégalité de Tchebychev: $P(|X - E(X)| \geq t) \leq \frac{V(X)}{t^2}$
pour $X \in L^2$ et $t > 0$.

S'obtient depuis l'inégalité de Markov: $P(|X| \geq t) \leq \frac{E(|X|)}{t}$

En effet: $P(|X - E(X)| \geq t) = P(|X - E(X)|^2 \geq t^2)$

$$\leq \frac{E(|X - E(X)|^2)}{t^2} = \frac{\text{Var}(X)}{t^2}$$

Ex: $P(|nX - Sn| \geq s)$ $Sn \sim B(n, \alpha)$ donc $E(Sn) = n\alpha$

③ ZQ p. 114 Par réc: $\forall r \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{N}_+, \psi(r, t) \leq r \psi(t)$

Donc $\forall q \in \mathbb{N} \mid q \leq 2 < q+1$ comme $\psi(1, t) \leq \psi(q+1, t) \leq (q+1)\psi(t) \leq (1+t)\psi(t)$

④ Ouvrand p. 16 Hölder: $\|XY\|_2 \leq \|X\|_p \|Y\|_q$ si $X \in L^p, Y \in L^q$

Car $p=q=2$: $\|XY\|_2 \leq \|X\|_2 \|Y\|_2$

Ex: $X = x - \frac{S_n}{n}$; $Y = 1$ donc $\|x - \frac{S_n}{n}\|_2 \leq \|x - \frac{S_n}{n}\|_2$

⑤ $\|x - \frac{S_n}{n}\|_2 = \|E(\frac{S_n}{n}) - \frac{S_n}{n}\|_2 = \sqrt{E(|E(\frac{S_n}{n}) - \frac{S_n}{n}|^2)}$

$$= \sqrt{\text{Var}(\frac{S_n}{n})}$$

$$\|Y\|_2 = \sqrt{E(Y^2)}$$
 $\text{Var}(X) = E((X - E(X))^2) = \|X - E(X)\|_2^2$

⑥ ZQ p. 247 $X \sim \text{Rademacher}$ si $P(X=1) = P(X=-1) = \frac{1}{2}$

⑦ ZQ p. 247 $\|f\|_2 \leq \|g\|_2 \leq \sqrt{2} \|f\|_2 \quad \forall f \in F_n = \text{Vect}(r_1, \dots, r_n)$
 où $|r_i(t)| = \text{signe}(\sin(2^i \pi t))$; $r_i \sim \text{Rademacher}$.

⑧ $E(f(X)) = \sum_{i=0}^n f(n_i) P(X=n_i)$ si X est discrète

$$= \int f(x) dP_X(x)$$
 si X est continue

Donc $E(f(\frac{S_n}{n})) = \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n}) P(\frac{S_n}{n} = k)$ $S_n \sim B(n, \alpha)$
 donc $P(S_n = k) = \binom{n}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k}$

$$= \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= B_n(x)$$

① Oursrand p. 23 $P(|X| \geq t) \leq \frac{E(|X|)}{t}$

$$E(|X|) = \int_{\mathbb{R}} |x| dP \geq \int_t^{+\infty} \underbrace{|x|}_{\geq t} dP \geq t \int_t^{+\infty} dP = t P(|X| \geq t)$$

⑧ $X_i \sim \mathcal{P}(1/2)$; $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = 1/2$
 $E(X_i) = 0$ $E(X_i^2) = 1$

$$\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = E((X_1 + \dots + X_n)^2) - \underbrace{E(X_1 + \dots + X_n)^2}_{=0}$$

$$= E\left(\sum X_i^2 - 2 \sum_{i \neq j} X_i X_j\right)$$

$$= \sum E(X_i^2) = n$$

⑨ $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{B}(x)$ indep; $P(X_i = 1) = x$ $P(X_i = 0) = 1-x$

$$E(X_1 + \dots + X_n) = \sum E(X_i) = nx \quad ; \quad E(X_i^2) = x$$

$$E((X_1 + \dots + X_n)^2) = \sum E(X_i^2) + 2 \sum_{i \neq j} E(X_i) E(X_j)$$

$$= nx + 2 \frac{n(n-1)}{2} x^2 = nx + n^2 x^2 - nx^2$$

$$\text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = nx + n^2 x^2 - nx^2 - (nx)^2 = nx(1-x)$$

$$P(S_n = k) = P(X_1 + \dots + X_n = k) = \binom{n}{k} P(X_i = 0)^{n-k} P(X_i = 1)^k$$

$$= \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

